7. Integrální počet

7.1. Primitivní funkce, Neurčitý integrál

Definice 7.1 Říkáme, že $F(x)$ je v intervalu (a,b) (přitom může být také $a = -\infty$, $b = +\infty$) primitivní funkcí k finkci $f(x)$, jestliže pro všechna $x \in (a,b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 7.2 Ke každé funkci $f(x)$ spojité v (a,b) existuje v (a,b) primitivní funkce. Je jich dokonce nekonečně mnoho. Je-li $F(x)$ jedna z nich, pak všechny ostatní mají tvar

$$F(x) + C,$$

kde C je libovolná konstanta a píšeme:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Poznámka Symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ znamená tedy množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ a nazývá se neurčitý integrál funkce $f(x)$. Přesto je zvykem pracovat s tímto symbolem jako s jedinou primitivní funkcí a ve výsledku připsat integrační konstantu C.

Věta 7.3 Nechť funkce F je primitivní funkcí k funkci f na (a,b), potom funkce F je spojitá na (a,b).

7.2. Newtonův integráll

Definice 7.4
Nechť funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $I = \langle a, b\rangle$. Číslo $F(b) - F(a)$ se nazývá Newtonův integrál funkce f na interval $\langle a, b\rangle$ a značí se

$$\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\, dx,$$

kde a je dolní mez, b je horní mez integrálu.
(pozn. Výše uvedený vztah je tzv. Newtonův – Leibnizův vzorec).
Množinu všech funkcí f, k nimž existuje Newtonův integrál, tj. které jsou newtonovsky integrovatelné značíme $\mathcal{N}(I)$ a píšeme $f \in \mathcal{N}(I)$.

Věta 7.5
Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $I = \langle a, b\rangle$. Potom f je newtonovsky integovatelná, tj. platí $f \in \mathcal{N}(I)$.

Věta 7.6
Newtonův integrál nezávisí na výběru primitivní funkce.

Věta 7.7
Nechť $f \in \mathcal{N}(I)$, pak pro $a, b, c \in I$ platí:

1. $\int\limits_a^b f(x)\, dx = -\int\limits_b^a f(x)\, dx,$
2. $\int\limits_a^a f(x)\, dx = 0,$
3. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$

7.3. Riemannův integrál

■ Nechť je dána funkce $f(x)$, omezená v intervalu $I = \langle a, b\rangle$.
Tj. existují čísla m, $M \in \mathbf{R}$ taková, že $m = \inf\limits_{x\in I} f(x)$, $M = \inf\limits_{x\in I} f(x)$.

■ Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ na n podintervalů $I_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, které nemusí být stejné délky ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$).

■ Protože $f(x)$ je omezená v I, je omezená i na každém podintervalu I_i.
Tj. existují čísla m_i, $M_i \in \mathbf{R}$ taková, že $m_i = \inf\limits_{x\in I_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in I_i} f(x)$)

■ Zvolené dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ označme d a sestrojme k tomuto dělení tzv. dolní integrální součet $s(d)$ a horní intergální součet $S(d)$ takto:

$$s(d) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad S(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Hodnota horního součtu $S(d)$ i dolního součtu $s(d)$ závisí na zvoleném dělení!

■ Supremum množiny všech dolních součtů (při všech možných děleních d) se nazývá dolní integrál z funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$:

$$\sup_{d} s(d) = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

■ Infimum množiny všech horních součtů (při všech možných děleních d) se nazývá horní integrál z funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$:

$$\inf_{d} S(d) = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Definice 7.8 Platí-li, že $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx,$

pak společné hodnotě těchto integrálů říkáme Riemanův integrál z funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ a píšeme:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx, \qquad \text{resp.} \quad (\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\, dx$$

Množinu všech funkcí f, k nimž existuje Riemannův integrál, tj. které jsou riemannovsky integrovatelné značíme $\mathcal{R}(I)$ a píšeme $f \in \mathcal{R}(I)$.

Věta 7.9

Mějme na intervalu $\langle a, b, \rangle$ posloupnost dělení d_1, d_2, d_3, $\ldots$ takovou, že $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{i(d_k)}(\Delta x_i) = 0$. Potom, je-li funkce $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, je

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S(d_k) = \lim_{k\to\infty} s(d_k).$$

Věta 7.10

Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a nechť současně $f \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$, Potom platí:

$$(\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

7.4. Základní pravidla integrování

Věta 7.11

Existují-li k funkcím $f_1(x)$, $f_2(x)$ a $f(x)$ primitivní funkce, pak:

1. $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbf{R}$,
2. $\int \Big(f_1(x) + f_2(x) \Big)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$

Věta 7.12

Je-li $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x) \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$:

1. $\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbf{R}$,
2. $\int\limits_a^b \Big(f_1(x) + f_2(x) \Big)\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

Tabulka základních integrálů

$f(x)$	$\int f(x)\, dx$	podmínky
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{\alpha+1}+C,$	$\begin{cases} x\in\mathbf{R}, & a\neq 1, a\in\mathbb{N}_0,\\ x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}, & a\neq 1, a\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0\\ x>0, & a\neq 1, a\in\mathbf{R},\end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C,$	$x\neq 0,$
e^x	$e^x+C,$	$x\in\mathbf{R},$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C,$	$x\in\mathbf{R}, a\neq 1, a>0,$
$\sin x$	$-\cos x+C,$	$x\in\mathbf{R},$
$\cos x$	$\sin x+C,$	$x\in\mathbf{R},$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C,$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x+C,$	$x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x+C,\\ -\arccos x+C,\end{cases}$	$x\in(-1,1),$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} x+C,\\ -\operatorname{arccotg} x+C,\end{cases}$	$x\in\mathbf{R},$
$\sinh x$	$\cosh x+C,$	$x\in\mathbf{R},$
$\cosh x$	$\sinh x+C,$	$x\in\mathbf{R},$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x+C,$	$x\in\mathbf{R},$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{cotgh} x+C,$	$x\in\mathbf{R}\setminus\{0\},$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} \operatorname{argcosh}\lvert x\rvert+C\\ \ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert+C,\end{cases}$	$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\begin{cases} \operatorname{argsinh} x+C,\\ \ln\lvert x+\sqrt{x^2+1}\rvert+C,\end{cases}$	$x\in\mathbf{R},$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \operatorname{argtgh} x+C,\\ -\operatorname{argcotgh} x+C,\end{cases}$	$x\in(-1,1),$ $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$

Základní věty integrálního počtu

Věta 7.13 (o střední hodnotě)
Je-li $f \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$, potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx\ , \qquad \text{resp.} \quad \int\limits_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b-a).$$

Poznámka
Číslo $\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ se nazývá <u>střední hodnotou funkce</u> f na $\langle a, b\rangle$. Věta 7.13 říká, že pro $f \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ je střední hodnota rovna funkční hodnotě funkce f v nějakém vnitřním bodě.

Důsledek 7.13(1)
Pro $f \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ a $f(x) \geq 0,\ x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

Důsledek 7.13(2)
Pro $f, g \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ a $f(x) \geq g(x),\ x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \geq \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

Důsledek 7.13(3)
Pro $f \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle),\ |f| \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ platí

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

Důsledek 7.13(4)
Nechť $g \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle),\ fg \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$.
Pokud $g(x) \geq 0,\ m \leq f(x) \leq M,\ x \in \langle a, b\rangle$, potom platí

a) $m \cdot \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq M \cdot \int_a^b g(x)\, dx;$

b) $m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a).$

Metody výpočtu primitivních funkcí

Základní integrály / Základní pravidla integrování

Integrování per partes (po částech)

Věta 7.14 (integrace per partes - po částech)
Nechť funkce $u = u(x),\ v = v(x)$ jsou diferencovatelné na $\langle a, b\rangle$ a nechť $uv' \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$. Potom také $u'v \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

resp.

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx,$$

Zajímavá užití per partes

1. K hledání primitivních funkcí k funkcím typu:

   $$x^n e^{kx},\ x^n \ln x,\ x^n \cos\omega x,\ x^n \sin\omega x,\ x^n \arcsin x,\ x^n \arccos x,$$

   Lze např. odvodit vzorce:

   $$\int e^{\alpha x}\cos\omega x\ dx = \frac{e^{\alpha x}(\omega\sin\omega x + \alpha\cos\omega x)}{\alpha^2+\omega^2} + C,$$

   $$\int e^{\alpha x}\sin\omega x\ dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\omega x - \omega\cos\omega x)}{\alpha^2+\omega^2} + C.$$

2. Odvození rekurentních formulí integrováním per partes pro $n \geq 1$:

   $$J_n = \int \cos^n x\ dx \ \Rightarrow\ J_{n+2} = \frac{1}{n+2}\cos^{n+1} x \sin x + \frac{n+1}{n+2}J_n$$

   $$J_n = \int \sin^n x\ dx \ \Rightarrow\ J_{n+2} = -\frac{1}{n+2}\sin^{n+1} x \cos x + \frac{n+1}{n+2}J_n$$

   $$J_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \ \Rightarrow\ J_{n+1} = \frac{1}{2n}\left[\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)J_n\right]$$

Integrování substitucí

Věta 7.15 (integrace substitucí)
Nechť $g \in \mathcal{N}(Z)$ a nechť funkce $z = f(x)$ je diferencovatelná na intervalu X, přičemž $f(X) \subset Z$. Potom pro $\langle a, b\rangle \subset X$ platí

$$\int\limits_a^b g(f(x))f'(x)\;dx = \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(z)\;dz = G(f(b)) - G(f(a)),$$

resp.

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(z)dz = G(f(x)) + C.$$

$*$ **Integrály typu** $\int R(x)\;dx$
$R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)},\ P, Q$ jsou polynomy; $(\mathrm{st}\,P) < (\mathrm{st}\,Q)$.

Funkci $R(x)$ rozložíme na součet základních racionálních funkcí typu:
(rozklad na parciální zlomky)

1. $\dfrac{A}{x - x_0};\ A,\ x_0 \in \mathbf{R}$,
2. $\dfrac{A}{(x - x_0)^k},\ A,\ x_0 \in \mathbf{R}\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$,
3. $\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q},\ A,\ B,\ p,\ q \in \mathbf{R}$,
   kořeny jmenovatele jsou komplexní (sdružené);
4. $\dfrac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k},\ A,\ B,\ p,\ q \in \mathbf{R}\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$
   kořeny jmenovatele jsou komplexní k-násobné.

∗ **Integrály typu** $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$
V intervalech, které neobsahují body $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, volíme buď univerzální substituci:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \text{tj.} \quad x = 2\operatorname{arctg} t.$$

Potom

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

nebo

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tg} x = t & \Longleftrightarrow & R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \\ \cos x = t & \Longleftrightarrow & R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \\ \sin x = t & \Longleftrightarrow & R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \end{array}$$

∗ **Integrály typu** $\int \cos mx \cos nx\ dx$, $\int \sin mx \cos nx\ dx$, $\int \sin mx \sin nx\ dx$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Užije se vzorců:

$$\int \cos mx \cos nx\ dx = \frac{1}{2}\Big[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\Big],$$

$$\int \sin mx \cos nx\ dx = \frac{1}{2}\Big[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\Big],$$

$$\int \sin mx \sin nx\ dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\Big].$$

∗ **Integrály typu** $\int R(\sqrt{1-x^2})dx$ substituce: $x = \sin t$ nebo $x = \cos t$
vzorce:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \quad \sin 2t = 2\sin t\cos t, \quad \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

∗ **Integrály typu** $\int R(\sqrt{1+x^2})dx$
substituce: $x = \sinh t$
vzorce:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \quad \sinh^2 t + \cosh^2 t = \cosh 2t.$$

∗ **Integrály typu** $\int R(\sqrt{x^2-1})dx$
substituce: $x = \cosh t$
vzorce:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \quad \sinh^2 t + \cosh^2 t = \cosh 2t.$$

7.5. Primitivní funkce jako funkce proměnné horní meze

Definice 7.16

Nechť $a, x \in I$ a $f \in \mathcal{N}(I)$. Potom primitivní funkci F k funkci f určenou vztahem

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\, dt$$

nazýváme integrálem s proměnnou mezí.

Poznámka

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = F'(x) = f(x);$$

$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(t)\, dt = -F'(x) = -f(x);$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt = \frac{d}{dx}\ [F(\varphi(x)) - F(a)] = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Definice 7.17

Nechť $f \in \mathcal{N}(\langle a, x\rangle)$ pro každé $x > a$. Existuje-li $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, potom $\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x)-F(a)]$ se nazývá nevlastní Newtonův integrál vlivem meze a značí se

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Definice 7.18

Mějme interval $\langle a, b\rangle$ a nechť $f \in \mathcal{N}(\langle a, x\rangle)$ pro každé $x \in \langle a, b)$, avšak $f \notin \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ (tj. rovnost $F'(x) = f(x)$ platí pouze pro $x \in \langle a, b)$).

Existuje-li $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$, potom $\lim\limits_{x\to b-} [F(x) - F(a)]$ se nazývá nevlastní Newtonův integrál vlivem funkce a značí se

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Poznámka

- Existuje-li konečná limita $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_a^x f(t)\ dt$, říkáme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\ dt$ konverguje.
- Neexistuje-li konečná limita $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_a^x f(t)\ dt$ (např. je nevlastní), říkáme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\ dt$ diverguje (neexistuje!).