1. Základní matematická terminologie

1.1. Číselné ~~množiny~~ obory

1.1.1 Označení číselných ~~množin~~ oborů

$N = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$ – množina (obor) přirozených čísel;

↑ Základní vlastnost: Když $k \in N$, potom $k+1 \in N$;

značka ... výčet prvků ... Stručně: $k \in N \Rightarrow k+1 \in N$

je to výrok – implikace výroků $k \in N$, $k+1 \in N$.

Množina N má nekonečně mnoho čísel – tzv. spočetná množina

$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – množina celých čísel;

Základní vlastnost: a) množina ~~všech~~ rozdílů libovolných dvou přirozených čísel:

$\forall j \in N, \forall k \in N \Rightarrow j - k \in \mathbb{Z}$

b) $\forall m \in \mathbb{Z}\ \exists r \in N\ \exists s \in N : r - s = m$

Vysvětlení kvantifikátorů!! [slovní příklad]

Množina $\mathbb{Z}$ má nekonečně mnoho čísel – tzv. spočetná množina

Platí: $N \subset \mathbb{Z}$ ... N je podmnožina $\mathbb{Z}$

↳ když $p \in N$ potom $p \in \mathbb{Z}$ (obráceně ne!)

Pozor!: $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \in N$ – nepravdivý výrok!!

tj. $\mathbb{Z} \not\subset N$ – $\mathbb{Z}$ není podmnožina N

$\mathbb{Q}$ – množina racionálních čísel; nelze zadat výčtem!

Základní vlastnosti: a) Každé racionální číslo lze vyjádřit konečným nebo periodickým (nekonečným) desetinným rozvojem:

např. $x \in \mathbb{Q}$: $x = 2{,}3751$; $x = \frac{3}{25}$, $x = \frac{22}{7} \approx \pi$ (!)

$y \in \mathbb{Q}$: $y = 1{,}27353535\dots$

Otázka: Jak se liší čísla $2{,}5$ a $2{,}499999\dots$

b) Každé racionální číslo lze vyjádřit ve tvaru zlomku

Otázka: Je zápis $\pi = 3{,}14$ správný?

Odpověď: Není: $\pi \notin \mathbb{Q}$, $3{,}14 \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ – množina reálných čísel

Základní vlastnosti: a) Každé reálné číslo lze vyjádřit nekonečným desetinným rozvojem

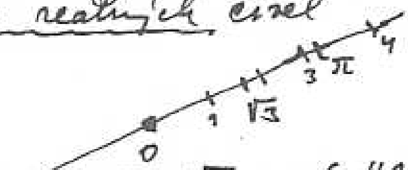
např.: $\frac{1}{4} = 0{,}25$ ... racionální číslo (konečný des. rozvoj)

avšak dále: $0{,}25 = 0{,}250000\ldots$ reálné číslo (nekonečný d. rozv.)

např. $\pi \in \mathbb{R}$: $\pi = 3{,}1415926579\ldots\ldots$ nekonečný neperiodický des. rozvoj

b) Každé reálné číslo je limitou nějaké konvergentní posloupnosti racionálních čísel.

c) Každému bodu nějaké přímky lze přiřadit jediné reálné číslo; přímce s tímto přiřazením říkáme reálná osa resp. osa reálných čísel



$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ – množina iracionálních čísel : $\pi, \sqrt{2}, e$ (základ přiroz. log.), ...

Výrok $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ znamená: $x \in \mathbb{R}$ a $x \notin \mathbb{Q}$ (symbolicky)

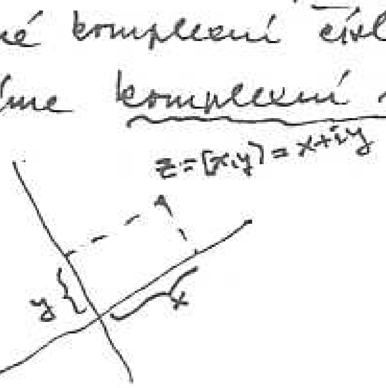
$\mathbb{C}$ – množina komplexních čísel

Základní vlastnosti: a) Uspořádaná dvojice reálných čísel: $z \in \mathbb{C}$, tj. $z = [x,y]$, kde $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

Zápis: $z = x + iy$; $i = [0,1]$; $i^2 = -1$; opravdu!!

Pozor: zápis $i = \sqrt{-1}$ je nesprávný!!

b) Každému bodu nějaké roviny lze přiřadit jediné komplexní číslo; rovině s tímto přiřazením říkáme komplexní rovina nebo Gaussova rovina



– reálná osa

– imaginární osa

Základní inkluze (inkluze: ⊂ je znak podmnožiny)

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

Otázka: Které číslo leží ve všech těchto množinách?

Odp.: Každé přirozené číslo!

[illegible] čísla!!

$\boxed{1.1.2.}$ Operace v číselných množinách.

N – sčítání, násobení, umocňování s přiroz. exponentem,

Z – sčítání, odčítání, násobení, umocňování s přiroz. exponentem

Q – sčítání, odčítání, násobení, dělení (kromě dělení nulou!!), umocňování s ~~celým~~ exponentem

R – sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování s celým exponentem, odmocňování pouze nezáporných čísel

C – všechny operace

Pozor! Porovnujeme operace, jejichž výsledek je opět v té množině: tzv. <u>uzavřenost operace</u> v množině

<u>Vlastnosti operací sčítání a násobení</u>

komutativnost	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
asociativnost	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
neutralita	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
distributivnost	$a(b+c)=ab+ac$ ⟶	

<u>Otázky</u>:
1. Jaké je největší reálné číslo menší než 1?
2. Jaké je největší reálné číslo?
3. Jaké je nejmenší reálné číslo?
4. Jaké je největší racionální číslo?
5. Je více racionálních čísel než čísel iracionálních?
6. Je více racionálních čísel než čísel přirozených?

<u>Úloha</u>: Vysvětlete „vrchcábovou" záhadu: Myslete si 3 jednomístná přir. čísla

1. První číslo vynásobte 2
2. Přičtěte k výsledku 5
3. Výsledek vynásobte 5
4. K výsledku přičtěte druhé číslo
5. Výsledek vynásobte 10
6. K výsledku přičtěte třetí číslo
7. Sdělte mi výsledek a já vám [illegible]

<u>Řešení</u>: a b c

$2a$

$2a+5$

$10a+25$

$10a+25+b$

$100a+10b+250$

$\underbrace{100a+10b+c}+250$

desítkový zápis = součet − 250

1.1.3 Shrnutí středoškolských pojmatků [Pohák: . . .]

a) $a \in R$, $n \in N$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ činitelů}}$

b) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

c) $a \neq 0$: $a^0 = 1$; [$a \neq 0$ znamená $a \in R - \{0\}$]

! výraz 0^0 není algebraicky definovatelný ;
lze mu dát smysl (nikoliv jednoznačně)
pouze jako limita (tzv. neurčitý výraz).

$$
\left.
\begin{array}{lll}
d) & a^m \cdot a^n = a^{m+n} , \\
e) & (a^m)^n = a^{mn} , \\
f) & (ab)^m = a^m b^m \\
g) & \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} , \\
h) & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} .
\end{array}
\right\}
\quad
\begin{array}{l}
a, b \in R \\
m, n \in N
\end{array}
$$

i) $r = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ právě tehdy když $a = r^n$; r... n-tá odmocnina
$n \in N$

Otázka: Pro jaké a bude $r \in R$?

Historická poznámka:
$\sqrt{\ }$ je stylizované písmeno r ; v latině radix,
v angličtině root (square root) znamená
kořen

Otázka: Pro jaké a platí $\sqrt{a^2} = a$?
$\quad$ " $\quad$ — $\quad$ $\sqrt{a^2} = -a$?

j) $a^{m/n} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$, $m, n \in N$

Otázka: Umíte definovat a posléze stanovit např.
1^π, 3^π, $(\pi)^\pi$; $(1+2i)^{(3-i)}$, $(i)^i$, ?

1.1.4. Uspořádání a nerovnosti.

Pro každá dvě čísla $x, y \in R$ platí právě jeden ze vztahů

$$x<y \quad , \quad x=y \quad , \quad x>y$$ (umíme to rozhodnout!)

Říkáme, že množina reálných čísel je uspořádaná;

Pro komplexní čísla to nelze, tj. neumíme rozhodnout které ze dvou komplexních čísel (s nenulovou imaginární složkou) je větší, umíme rozhodnout pouze o rovnosti:

$$x+iy = a+ib \iff x=a,\ y=b.$$

právě tehdy, když

Důležité vlastnosti (ilustrujte na příkladech).

a) $\forall x,y,z \in R: x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$, logické symboly „přečklad"

b) $\forall x,y,z \in R: x<y \iff x+z<y+z$,

c) $\forall x,y \in R; x>0, y>0 \Rightarrow xy>0$ [obrácená implikace neplatí!!]

Otázka: Co znamená zápis $a \leqq b$?
Co je správně: $3<4,\ 3\leqq 4,\ 4\leqq 4,\ 4<4$; ?

Otázka: Jaký je rozdíl mezi nerovností a nerovnicí?

Otázka: Jaký je rozdíl mezi rovností a rovnicí?

Př: Stanovte $x\in R$ taková, aby platilo: $3+x<7$
Př: Rozhodněte, zda platí $2^{3,14} < 1,9^{\pi}$?

1.2. Podmnožiny $\mathbb{R}\ (\equiv \mathbb{R}^1)$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}$

1.2.1 Souřadnicové systémy

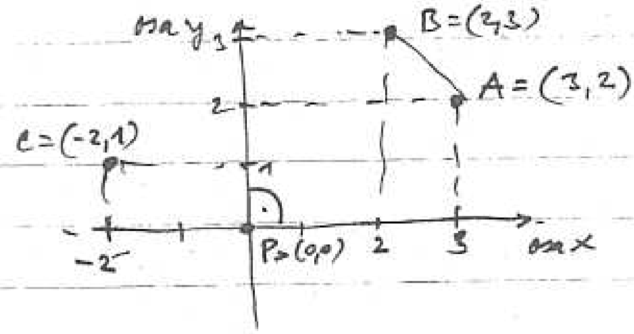
Množinu všech reálných čísel = obor reálných čísel označujeme také: $\mathbb{R}^1$, resp. $(-\infty,+\infty)$.

$\mathbb{R}^2$ – množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel:

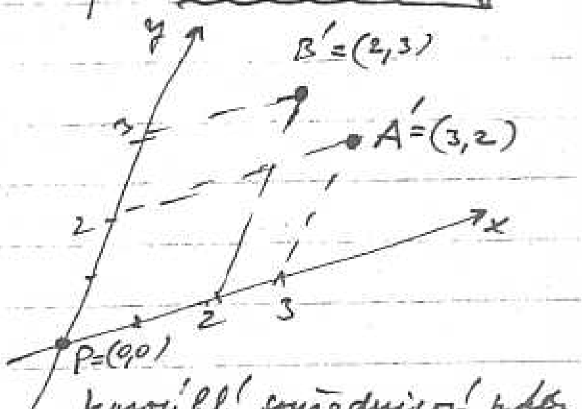
$\equiv \{(x,y) : x\in \mathbb{R}^1,\ y\in \mathbb{R}^1\}$;

Geometrická interpretace: Dvojici (x,y) nazýváme bodem v rovině $\mathbb{R}^2$; čísla x, y nazýváme souřadnice tohoto bodu;

Volíme v $\mathbb{R}^2$ dvě různoběžné přímky – souřadnicové osy



pravoúhlý kartézský souřadný systém



kosoúhlý souřadnicový systém

P – počátek souřadnicového systému;

V $\mathbb{R}^2$ můžeme zavést nekonečně mnoho souřadnicových systémů. Poloha bodu je určena nejen dvojicí čísel (x,y), ale také zvoleným souřadnicovým systémem.

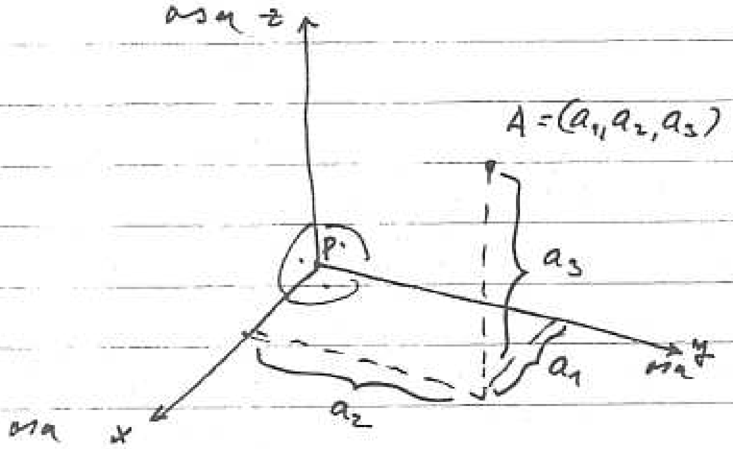
Vzdálenost $d(A,B)$ bodů A,B je nezáporné číslo, které závisí na zvoleném souřadnicovém systému

V kartézském souřadnicovém systému (!) je to číslo určeno vztahem

$$d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\ ;\quad A=(a_1,a_2),\ B=(b_1,b_2)$$

R^3 – množina všech uspořádaných trojic reálných čísel
$\equiv \{(x,y,z) : x \in R^1, y \in R^1, z \in R^1\}$

Trojici $(x,y,z) \equiv A$ nazýváme bodem v trojrozměrném prostoru. Čísla x,y,z jsou souřadnice tohoto bodu ve zvoleném souřadnicovém systému: tři souřadnicové osy



$P = (0,0,0)$
počátek

Kartézský (pravoúhlý) souřadnicový systém

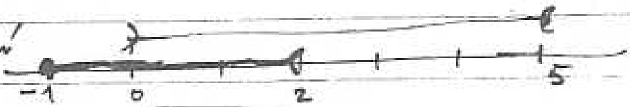
1.2.2 Intervaly – speciální podmnožiny R.

$\langle a,b \rangle = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$, – uzavřený interval
$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$, – otevřený interval
$(a,b\rangle = \{x \in R : a < x \leq b\}$ – polouzavřený interval (otevřený)

$\langle a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ — " —
$\langle a,+\infty) = \{x \in R : a \leq x\}$
$(a,+\infty) = \{x \in R : a < x\}$
$(-\infty,b\rangle = \{x \in R : x \leq b\}$
$(-\infty,b) = \{x \in R : x < b\}$

Př: Určit a znázornit na reálné ose:

$\langle -1,2) \cup (0,5) = \langle -1,5)$; sjednocení



$\langle -1,2) \cap (0,5) = (0,2)$; průnik

$\langle -1,2) - (0,5) = \langle -1,0)$; rozdíl

1.2.3. Omezené číselné množiny

Číselná množina $A \subset R$ je ~~shora~~ (zdola) shora omezená, když existuje reálné číslo $c \in R$ takové, že všechna čísla $x \in A$ jsou nejvýše rovna c:

„(nejsou menší než c)“ špatná formulace !!

tj. $$\exists c \in R \ \forall x \in A : x \leqq c \quad (x \geqq c)$$

Číselná množina B je omezená, když

$$\exists c_1, c_2 \in R \ \forall x \in B : c_1 \leqq x \leqq c_2 \ ;$$

Supremum ...

Infimum ...

Maximum číselné množiny A je takové číslo $m_1 \in A$, že ~~takž platí~~

$$\forall x \in A : x \leqq m_1 \ , \qquad m_1 = \max A$$

[největší číslo z množiny A]

Minimum číselné množiny A je takové číslo $m_2 \in A$, že

$$\forall x \in A : m_2 \leqq x \ ; \qquad m_2 = \min A$$

[nejmenší číslo z množiny A] ;

Př: $\max \langle -2, 1 \rangle = 1$;

$\max \langle -2, 1)$ .. neexistuje

Absolutní hodnota reálného čísla $x \in R$ je větší z čísel

$$x \text{ a } -x \ ;$$

značíme: $|x| = \max\{x, -x\}$.

Důsledek 1: $|x|$ je vždy nezáporné číslo, tj. $|x| \geqq 0$

Důsledek 2: Pro $x>0$ je $|x|=x$;

Pro $x<0$ je $|x|=-x$;

Pro $x=0$ je $|x|=0$;

Důsledek 3: Množina $B \subset R$ je omezená, právě tehdy když

$\exists c>0 \; \forall : |x| \leqq c \quad \forall x \in B$

Důsledek 4: $\forall a,b \in R$: $|a+b| \leqq |a|+|b|$, trojúhelníková nerovnost

Důsledek 5: $\forall a,b \in R$: $||a|-|b|| \leqq |a-b| \leqq |a|+|b|$

Důsledek 6: $\forall a \in R$: $|a|^2 = a^2$,

$\sqrt{a^2} = |a|$

$|ab| = |a||b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

1.2.4. Výroky, logické symboly

Výrok –

negace výroku

složené výroky – rušíjce výroků: $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$

Kvantifikátory;

negace kvantifikovaných výroků

1.2.5 Množiny a operace s nimi

Sjednocení : $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Průnik : $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Rozdíl : $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

negace : $\neg A = \{x : x \notin A\}$; $x \in A \Leftrightarrow x \notin \neg A$

Geometrické znázornění

~~1.2.6~~.