8. Jednoduché dynamické systémy

8.1. Matematický popis jevů, dějů, procesů

8.1.1

Procesy: Fyzikální : — struktura, řízení, pohyby, přenos energie, silové působení, el. a mg. děje, jevy, procesy (např. kulový blesk ?)

Chemické : — struktura, slučování, hoření, rozklady, ...

biologické : — — — — .

ekologické : —

ekonomické : — řízení výrobních, průmyslových, ... procesů, finanční procesy,

společenské : jevy, procesy, ... atd

Systém — určitý soubor jevů, dějů, procesů s vnitřní souvislostí ;

např: — planetární systém
— krystalická struktura látky
— energetický systém
— výrobní systém (např. výrobní linka)
— bankovní systém, peněžní systém
— systém lovec-kořist (torpédo - křižník)

K popisu systému používáme matematické nástroje, abychom mohli předvídat (odhadovat) chování systému na základě matematicky formulovaných poznaných zákonitostí :

zákony rovnováhy — silové, ekonomické, momentové, ... atd

zákony bilanční — ~~zákony~~ energetické bilance, tepelné bilance, zákony elmg. pole

zákony pohybu — zákony dynamiky

Dynamický systém: tak označujeme takový soubor jevů, dějů, resp. procesů, který se vyvíjí v čase, tj. parametry systému jsou popsatelné funkcemi, v nichž argument má význam času:

Typické příklady:
- pohybující se těleso, …, počasí, …,
- proudění vzduchu (např. v plicích)
- elmg. vlnění, el. proud v el. obvodech

Stav systému popisujeme tzv. stavovými funkcemi.

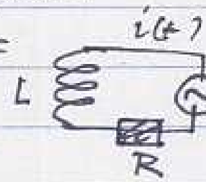
V matematice se termín dynamický systém používá pro matematický popis příslušných zákonitostí (dynamických zákonů)

8.1.2. Jednoduché diferenciální modely časově závislých procesů

(A) Proces (jev): El. proud v jednoduchém el. obvodu. „LR-obvod"

Zákonitost: Kirchhoffův zákon (napěťová bilance):

napětí na cívce + napětí na R =
= napětí zdroje



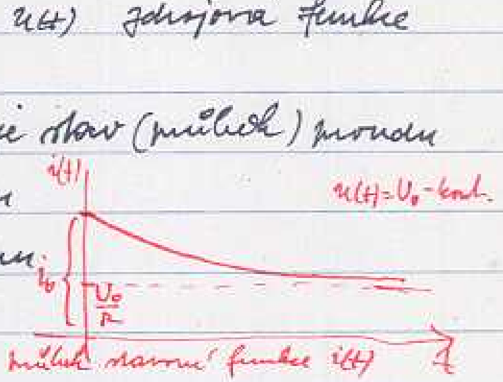
$$\underbrace{L\frac{di(t)}{dt}}_{u_L} + \underbrace{Ri(t)}_{u_R} = u(t), \quad t \in \langle 0, T\rangle$$

$u_L + u_R = u(t)$, $u(t)$ zdrojová funkce

$i = i(t)$ – funkce stavu: popisuje stav (průběh) proudu v obvodu

L, R, u – parametry systému

$i(0) = i_0$ – počáteční stav



(B) Proces (jev): Padající těleso (hmotný bod) v gravitačním poli

Zákonitost: Newtonův pohybový zákon (silová bilance)

$$\underbrace{m\frac{dv(t)}{dt}}_{\text{setrvačná síla}} + \underbrace{kv(t)}_{\text{odporová síla}} = \underbrace{mg}_{\text{síla grav. pole (tahová síla)}}, \quad t \in \langle 0, T\rangle$$

$v = v(t)$ — rychlost ≡ stavová funkce

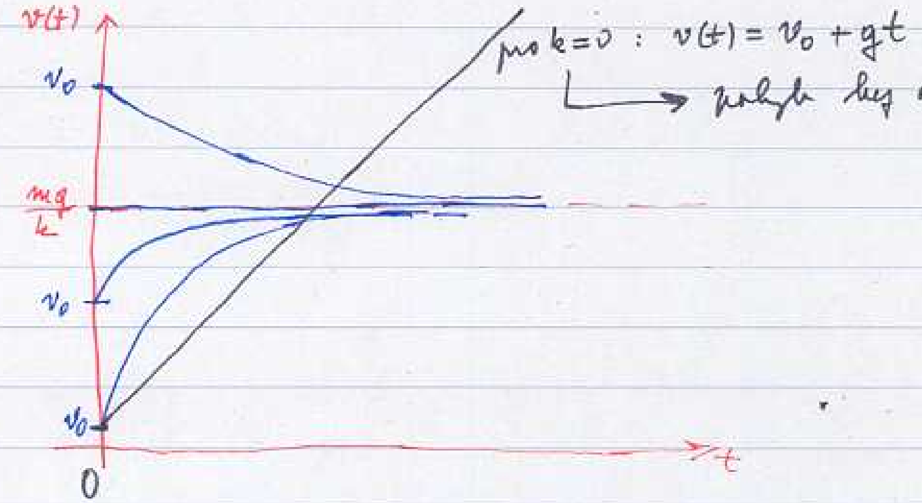
$mv(t)$ — hybnost ≡ stavová funkce

m, k, g — parametry systému

$v(0) = v_0$ — počáteční stav; v_0 počáteční rychlost

Průběh stavové funkce $v = v(t)$

→ stanovuje se jako řešení příslušných diferenciálních rovnic



(C) Proces (jev): – Množství prodaných výrobků na daném trhu
– množství (hustota) biologických jedinců v dané lokalitě

Zákonitost: bilance změn: relativní přírůstek (změna) je ~~[illegible]~~ úměrný množstvím (hustotou) objektů, kapacitou prostředí, ... atd

→ u biolog. systému: Rozmnožovací zákon

→ v ekonomii: Logistická bilance

Stavová funkce : $N = N(t)$ .. hustota: – viz příklady

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN + M(t);$$

→ migrace, export, import

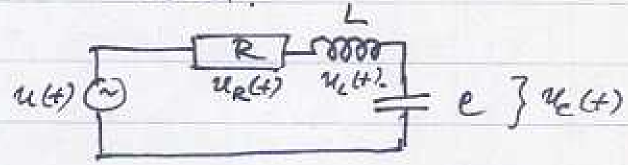
→ koeficient porodnosti („výrobnosti"); obecně a není konstanta, ale závisí na řadě parametrů systému $a = a(t, N, K)$

K .. kapacita prostředí

Odhad u člověka, krys, hmyzu?

(D) Proces (jev): El. proud v LRC-obvodu:

Zákonitost: Kirchhoffův zákon:



$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = u(t) ; \qquad t \geq 0 ;$$

resp.

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_C(t) = u(t) ;$$

kde

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} \iff \underbrace{u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau}_{\text{dynamická podoba vzorce}}$$

$$U = \frac{Q}{C}$$, Q... celkový náboj na kondenzátoru

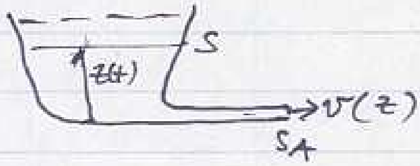
→ zde máme dvě stavové funkce: $i(t)$, $u_C(t)$

L, R, C, u — parametry systému

$i(0) = i_0$,
$u_C(0) = u_0$ $(=0)$.

(E) Proces (jev): – Výtok tekutiny (vody) otvorem v nádobě
– vypuštění vodní nádrže (protržení hráze

Zákonitost: – pohybový zákon + bilance objemu
[Bernoulliův zákon]
→ zákon rychlosti



$$\frac{dz}{dt} = \varphi\left(\frac{S_A}{S}\right) v(z) ,$$ φ – funkce poměru řezů „nádoby".

(F) Proces (jev): Chladnutí motoru

Zákonitost: Fourierův zákon přestupu tepla

$$\frac{du(t)}{dt} = -\alpha\,[u(t) - u_0]$$

$u = u(t)$ teplota
α.. koeficient přestupu
u_0 počáteční teplota

8.2. Úlohy pro diferenciální rovnice (1. řádu)

8.2.1. Pojem diferenciální rovnice (1. řádu)

Uvedené příklady zákonitostí (bilancí) měly tvar vztahů (rovností), v nichž vystupovaly derivace stavových funkcí, tj. vztahů typu

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \quad \text{resp.} \quad \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x));$$

tedy

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad \text{resp.} \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

Jestliže formulujeme úlohu: Najdi stavovou funkci $y = y(t)$, $t \in \langle t_0, T)$ takovou, že platí daná rovnost, pak zápis

$$\dot{y} = f(t, y) \qquad [y' = f(x, y)]$$

se nazývá diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci $y = y(t)$, $t \in \langle t_0, T\rangle$.
Funkce $y = y(t)$, která pak splňuje rovnost

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in \langle t_0, T)$$

se nazývá řešení diferenciální rovnice nebo také odezva dynamického systému. Graf řešení se nazývá integrální křivka.

Př: Funkce $i = i(t) = \frac{K}{R} + \left(i_0 - \frac{K}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$, $t \in (0, +\infty)$
je řešením diferenciální rovnice

$$L\frac{di}{dt} + Ri = K$$

a splňuje počáteční podmínku

$$i(0) = i_0.$$

Neboť: $\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}\left(i_0 - \frac{K}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$ a dosazením ověříme.

8.2.2. Poznámka

Jestliže zkoumané zákonitosti vyjádříme pro průměrné relativní změny, tj. ve tvaru

$$\frac{y(t_k+\Delta t)-y(t_k)}{\Delta t} = g(t_k, y(t_k)),$$

pak pro výpočet hodnot $y(t_k) = y_k$ stavové funkce $y=y(t)$ stačí zvolit posloupnost časů

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_k$$

a použít rekurenci

$$y_{k+1} = y_k + g(t_k, y_k)\cdot\Delta t_k, \qquad \Delta t_k = t_{k+1}-t_k.$$

Dostaneme se tak k diferenčním rovnicím – viz kap. 3.
Na tomto principu jsou odvozeny numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic.

8.2.3. Počáteční úloha

Je dán vzorec $f(t,z)$ a čísla $y_0 \in R$, $t_0 \in I$.
Úloha najít funkci $y=y(t)$, která:

a) splňuje rovnost

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I$$

b) splňuje počáteční podmínku

$$y(t_0) = y_0,$$

se nazývá počáteční úloha a funkce $y=y(t)$ se nazývá řešení počáteční úlohy (odezva).

Úlohu stručně zapisujeme:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{y} = f(t,y), \ t \in I \\ &y(t_0) = y_0 \end{aligned}}$$

8.3. Metody určování odezvy

8.3.1. Metoda přímé integrace

Je použitelná pro rovnice typu

$$\dot{y} = f(t) \quad , t \in I$$

Platí-li

$$\dot{y}(t) = f(t) \, , t \in I \quad ,$$

pak také platí

$$\int_{t_0}^{t} \dot{y}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$$

; $t_0 \in I$ je dané nebo zvolené číslo

a tedy

$$\boxed{y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)dt}$$

$t_0, y(t_0)$ jsou zde libovolná čísla

je hledaná funkce.

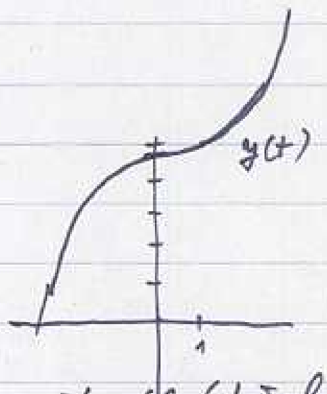
Vzpomeneme si, že (diferenciální) rovnice představovala požadavek najít primitivní funkci k funkci $f(t)$ na intervalu I.
Můžeme ji také zapsat ve tvaru

$$\boxed{y(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C}$$

Př: Řešme (poč.) úlohu: $\dot{y} = t^2$, $y(1) = 5$.

a)
$$y(t) - y(1) = \int_1^t \tau^2 d\tau = \frac{\tau^3}{3}\Big|_1^t = \frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \left(5 - \frac{1}{3}\right) + \frac{t^3}{3}$$

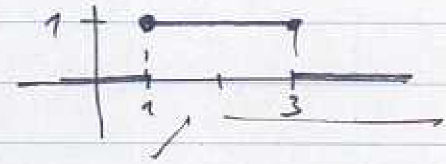


integrální křivka

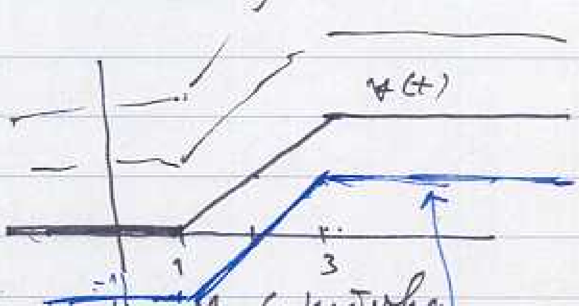
b)
$$y(t) = \frac{t^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} + C = 5 \quad \Rightarrow C = \left(5 - \frac{1}{3}\right)$$

Př: Řešme počáteční úlohu: $\dot{y} = f(t)$, $y(0) = 0$;

kde
$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 1,3 \rangle, \\ 0, & t \notin \langle 1,3 \rangle \end{cases}$$



$$y(t) = y(0) + \int_0^t f(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$



Výsledek: $t \leq 1$: $y(t) = \int_0^t 0\,d\tau = \underline{0}$

$1 \leq t \leq 3$: $y(t) = \int_0^t f = \int_0^1 + \int_1^t 1 \cdot d\tau = \underline{t-1}$,

$t \geq 3$: $y(t) = \int_0^t f = \int_0^1 + \int_1^3 1\,d\tau + \int_3^t 0\,d\tau = \underline{2}$

$y(t) = \begin{cases} 0 \\ t-1 \\ 2 \end{cases}$

integrální křivka řešení úlohy odezva na $f(t)$.

Př: Řešme počáteční úlohu: $\dot{y} = f(t)$, $y(0) = -1$;
kde $f(t)$ jako v předch. příkladu.

obdobný postup:
$$y(t) = -1 + \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

Poznatek: Všechny další (rafinovanější) metody z principu přímé integrace vycházejí.

8.3.2. Metoda separace proměnných

– začít příkladem!

Je použitelná pro rovnice typu

$$\dot{y} = \frac{f_1(t)}{f_2(y)}, \quad \text{kde } f_1, f_2 \text{ jsou dané funkce.}$$

Je-li $y = y(t)$ řešení, pak platí vztah

$$f_2(y(t))\,\dot{y}(t) = f_1(t)$$

resp.

$$f_2(y(t))\,dy(t) = f_1(t)\,dt$$

neboli

$$f_2(y(t))\,\dot{y}(t)\,dt = f_1(t)\,dt$$

Integrováním této rovnosti

$$\int_{t_0}^{t} f_2(y(\tau))\,\dot y(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} f_1(\tau)\,d\tau$$

integrace složené funkce
(substituce $y = y(\tau)$)

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} f_2(y)\,dy = \int_{t_0}^{t} f_1(\tau)\,d\tau$$

Je-li $F_1(t)$ primitivní k $f_1(t)$

a $F_2(y)$ primitivní k $f_2(y)$

pak obdržíme:

$$F_2(y(t)) - F_2(y(t_0)) = F_1(t) - F(t_0)$$

Čísla $F_2(y(t_0))$, $F_1(t_0)$ hrají roli integrační konstanty,
pokud ! $t_0, y(t_0)$ nejsou dána počáteční podmínkou

Výsledkem je rovnice (funkcionální)

$$F_2(y) = F_1(t) + C \, ,$$

Obecný integrál rovnice

z níž musíme hledanou funkci $y = y(t)$ vypočítat.

Př: Řešme dif. rovnici $\dot y = 2\frac{y}{t}$, $t \neq 0$

Separace

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dt}{t} \longrightarrow \ln y = 2\ln t + \ln C$$

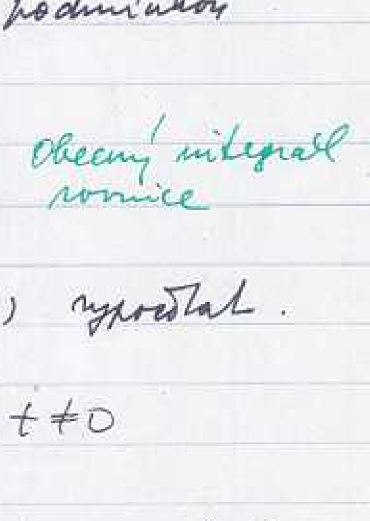
$$\boxed{y(t) = Ct^2}$$

obecné řešení !!

nebo

$$\ln y(t) - \ln y(t_0) = 2[\ln t - \ln t_0]$$

$$\boxed{y(t) = y(t_0)\frac{t^2}{t_0^2}}$$



Otázka: Proč není nutné psát: $\ln|y| = 2\ln|t| + \ln|C|$?
Teoretická otázka u zkoušky !!

Př: Řešme diferenciální rovnici

$$\dot{y} = \frac{t}{y}, \quad y \neq 0$$

separace

$$y\,dy = t\,dt$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C, \quad C \text{ libovolná konstanta}$$

$$\boxed{y^2 - t^2 = 2C} \quad \begin{cases} y(t) = \sqrt{2C + t^2} \\ y(t) = -\sqrt{2C + t^2} \end{cases}$$

Př: $y' = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$ — jiné značení, jinak totéž co výše

- - - - - - -

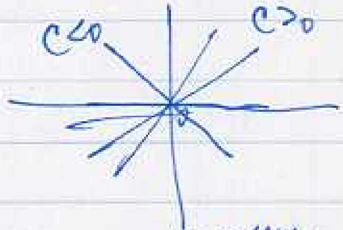
$$\boxed{y^2 - x^2 = 2C}$$

$C = \frac{1}{2}$ rovnoosá hyperbola

Pro $\boxed{C = -\frac{1}{2}: \quad x^2 - y^2 = 1}$

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \\ -\sqrt{x^2-1} \end{cases}, \quad x^2 > 1$$

→ systém hyperbol



Př: $y' = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \longrightarrow \ln y = \ln x + \ln C$

$\boxed{y = Cx}$ systém přímek

← osa x sem patří, osa y ne!

$\frac{x}{y} = \frac{dx}{dy} \longrightarrow \ln x = \ln y + \ln K \Rightarrow \underline{x(y) = Ky}$

osa y sem patří, osa x ne!

Př: $y' = -\frac{x}{y}$, $y \neq 0$

$$y\,dy = -x\,dx \longrightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C}$$

systém kružnic

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{2C - x^2}} \quad \text{— hledaná funkce}$$

Př: Logistická rovnice: $\dot{y} = ay\left(1-\frac{y}{K}\right)$, $t \geq t$

poč. podmínka: $y(t_0) = y_0$;

a, K – konstanty

→ řešení: $y(t) = \frac{K}{1+Ce^{-at}}$

↑ logistická křivka

Konkrétně: $\dot{y} = y(1-y)$, $a=1, K=1$

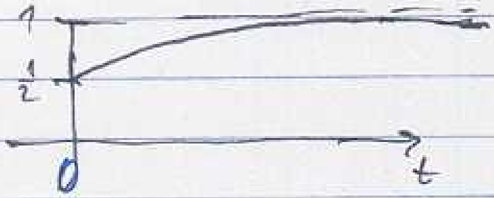
Separace proměnných:

$$\frac{dy}{y(1-y)} = dt$$

(*) $\quad dt = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right)dy$ / integrovat od t_0 do t $\quad$ [rozklad na parciální zlomky]

$$t - t_0 = \ln\left|\frac{y}{y-1}\right| - \ln\left|\frac{y_0}{y_0-1}\right| \quad , \; y_0 = y(t_0)$$

Pro $t_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{2}$: $t = \ln\frac{y}{y-1} \Rightarrow \frac{y}{y-1} = e^t$



tj. $\boxed{y(t) = \frac{e^t}{e^t-1}}$ → 1 pro $t \to +\infty$

$= \frac{1}{1-e^{-t}}$

Obecně:

$$y(t) = \frac{be^{t-t_0}}{be^{t-t_0}-1}, \quad b = \left|\frac{y_0}{y_0-1}\right|$$

nebo

$$y(t) = \frac{Ce^t}{Ce^t-1}, \quad C \text{ .. obecná konstanta}$$

$= \frac{1}{1-Ce^{-t}}$

C – obecná konstanta

Plyne z (*): $\ln e^t + \ln C = \ln\frac{y}{y-1}$

$$Ce^t = \frac{y}{y-1};$$

Otázka pro praxi: Jak se chová funkce $y(t)$ pro různé volby počátečních podmínek.

Také pro zkoušku!

Př: Řešme počáteční úlohu $\quad \dot{y} = f(t,y)\,,\ t \geq t_0$
$$y(t_0) = y_0\,,$$

kde
$$f(t,y) = \begin{cases} M\,, & t \in \langle t_0, t_1 \rangle\,, \quad M \text{ je konstanta} \\ ay\,, & t \geq t_1\,, \quad a \text{ je konstanta} \end{cases}$$

$t \in \langle t_0, t_1 \rangle : \ \dot{y} = M \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y(t) = y_0 + M(t - t_0)\,;}$

$t \in \langle t_1, +\infty) : \ \dot{y} = ay \quad \xrightarrow[\text{separace}]{} \quad \displaystyle\int_{t_1}^{t} \frac{d y(\tau)}{y(\tau)} = \int_{t_1}^{t} a \, d\tau$

$$\ln y(t) - \ln y(t_1) = \ln e^{at} - \ln e^{at_1}$$

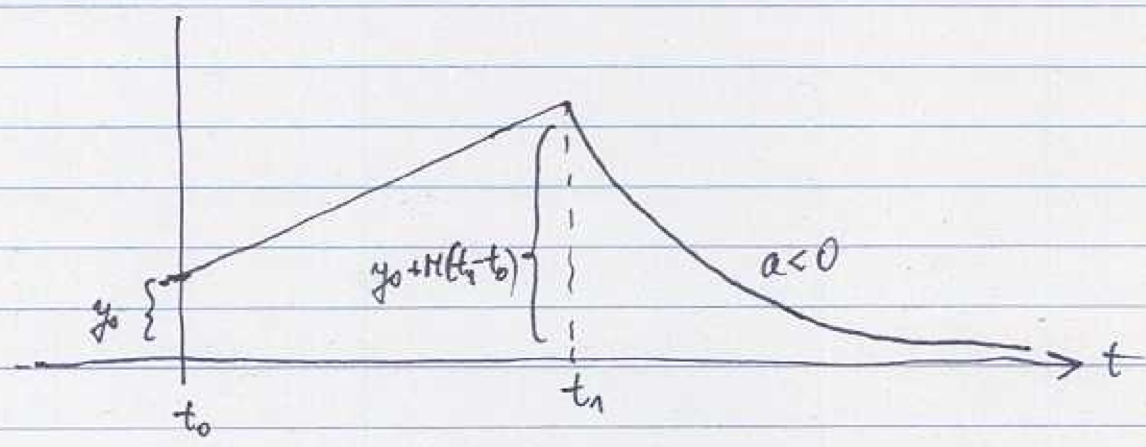
$$\boxed{y(t) = y(t_1)\, e^{a(t - t_1)}}$$

Z podmínky spojitosti: $y(t_1) = y_0 + M(t_1 - t_0)$

Závěr:

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + M(t - t_0)\,, & t \in \langle t_0, t_1 \rangle \\ \underbrace{[y_0 + M(t_1 - t_0)]}_{\text{konstanta} = y(t_1)} e^{a(t - t_1)}\,, & t \geq t_1 \end{cases}$$

graf řešení: pro $a < 0$ $\quad$ (např. $a = -0{,}01$)



8.4. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

8.4.1. Homogenní rovnice 1. řádu

Je to rovnice tvaru

– rozmnožovací rovnice
–
–

$$\dot{y} = \underbrace{a(t)y}_{f(t,y)} \quad , \quad t \in I$$

$f(t,y)$ je lineární funkcí v proměnné y

Vlastnosti: 1) Je-li $y_1(t), y_2(t)$ dvě řešení homog. rovnice, pak také funkce

$$u(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

je řešením téže rovnice: tj.

$$\dot{y}_1 = a y_1 \;, \; \dot{y}_2 = a y_2 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(\alpha y_1 + \beta y_2) = a(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

2) všechna řešení homogenní rovnice se dají vyjádřit jako číselný násobek jednoho pevně zvoleného řešení $z(t)$: $\dot{z} = a(t) z$;

Je-li $y(t)$ jiné řešení, tj. $\dot{y} = a(t) y$

pak

$$a(t) = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z}}{z} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}z - y\dot{z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{z}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y(t)}{z(t)} = C \quad \Rightarrow \boxed{y(t) = C z(t)}$$

Za $z(t)$ volíme řešení počáteční úlohy

$$\boxed{\dot{z} = a(t) z \quad , \quad z(t_0) = 1} \quad , \quad t_0 \in I \text{ libovolné!}$$

Metodou separace dostaneme: $\boxed{z(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}}$

Pro a = konst. $\boxed{z(t) = e^{a(t-t_0)}}$

Tomuto řešení říkáme <u>fundamentální řešení lin. rovnice 1. řádu</u>

Př: Určit fundamentální řešení.

a) $\dot{y} = 3y$; $z(t) = e^{\int_{t_0}^{t} 3\,d\tau} = e^{3(t-t_0)}$

b) $\dot{y} = -2y$; $z(t) = e^{-2(t-t_0)}$;

c) $\dot{y} = ty$; $z(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \tau\,d\tau} = e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}}$.

d) $\dot{y} = -\frac{1}{t}y$; $z(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau}\,d\tau} = e^{-[\ln t - \ln t_0]} = \frac{t_0}{t}$
$t \neq 0$

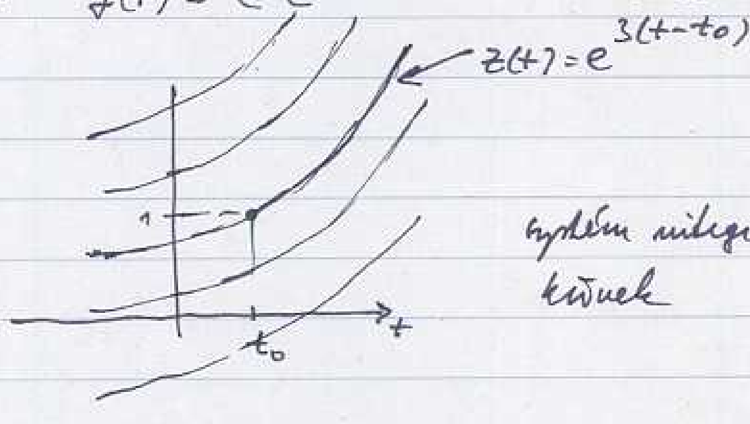
Systém všech řešení má pak tvar

! $$\boxed{y(t) = C\,z(t) = C\,e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}}$$

a nazývá se obecné řešení lin. dif. rovnice 1. řádu

Př:

a) $\dot{y} = 3y \longrightarrow y(t) = C\,e^{3(t-t_0)}$ obecné řešení

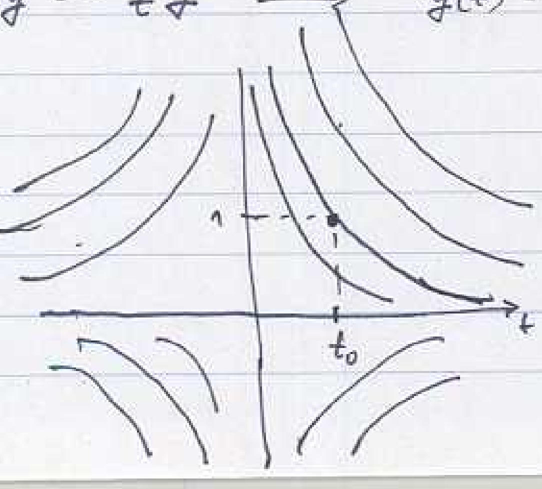


systém integrálních křivek

b) ...

c) ...

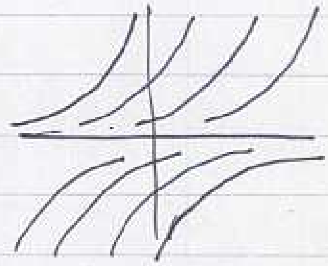
d) $\dot{y} = -\frac{1}{t}y \longrightarrow y(t) = C\frac{t_0}{t}$, $t \neq 0$ — obecné řešení



systém integrálních křivek

Př. ! Rovnice $\dot{y} = y^2$ není lineární!

metodou separace určíme:
$$\frac{dy}{y^2} = dt$$
$$-\frac{1}{y} = t + C$$
$$\Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{1}{t+C}}$$



Systém řešení se také nazývá obecné řešení : systém hyperbol

8.4.2. Nehomogenní rovnice 1. řádu

automaticky se rozumí, že lineární

! Nevíme, co je homogenní či nehomogenní nelineární rovnice

- jak se stát milionářem
- rovnice téměř detektivní
- jak si vydělat na živobytí

Je to rovnice tvaru

$$\dot{y} = a(t)y + b(t)$$

$a(t)$ → koeficient rovnice

$b(t)$ → nehomogenita „pravá strana"

Poznámka: Tradiční „řešitelé" a uživatelé diferenciálních rovnic užívají následující neúplné názvosloví:

„rovnice bez pravé strany", „zkrácená rovnice" : $\dot{y} = a(t)y$

„rovnice s pravou stranou", „nezkrácená rovnice" : $\dot{y} = a(t)y + b(t)$

Metoda – převod na metodu přímé integrace (odst. 8.3.1):

2 ekvivalentní principy :
1. metoda integračního faktoru
2. metoda variace konstanty

→ více se hodí pro rovnice vyšších řádů a pro soustavy ODR

~~Odstavec~~ Výklad metody:

Nechť $y = y(t)$ je řešením LODR, tj. platí

$$\dot y(t) = a(t)\,y(t) + b(t) \quad ;$$

vynásobíme rovnici vhodnou (zatím neznámou) nenulovou funkcí $w = w(t)$. Dostaneme

$$w\dot y - a y w = b(t)\,w$$

Když najdeme $w(t)$ takové, že $\dot w = -a w$

tj. $w(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ integrační faktor

pak $[(wy)^{\cdot} = w\dot y + \dot w y]$ $\quad \frac{1}{w} = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$

$$\frac{d}{dt}(wy) = b(t)\,w(t)$$

Přímou integrací pak:

$$w(t)y(t) = \int_{t_0}^{t} b(\tau)w(\tau)\,d\tau + \underbrace{w(t_0)y(t_0)}_{C}$$

$$\boxed{y(t) = C\underbrace{e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}}_{z(t)} + \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, e^{\int_{\tau}^{t} a(s)ds}\, d\tau}$$

obecné řešení homog. rovnice

partikulární řešení nehomogenní rovnice

8.4.3. Výklad metody na příkladech

a) Pro $\dot y = 3y + e^{-2t} \;/ w, \quad t \in R$

integrační faktor

derivace vhodného součinu

$\underbrace{w\dot y - 3yw} = w e^{-2t} \quad \Rightarrow$ položme $(\dot w = -3w \Rightarrow w(t) = e^{-3t}$

$\frac{d(yw)}{dt} = e^{-3t}\cdot e^{-2t} \Rightarrow yw = C + \frac{e^{-5t}}{-5} \Rightarrow y(t) = Ce^{3t} - \frac{1}{5}e^{-5t}\cdot e^{3t}$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = \underbrace{Ce^{3t}}_{u(t)} - \underbrace{\frac{1}{5}e^{-2t}}_{v(t)}}$ obecné řešení nehomogenní rovnice

↓ odezva!

obecné řešení homog. rovnice

Graf: ..

part. řešení nehomog. rovnice

b) $\dot{y} = 3y + e^{3t}, \; t \in R$

$$\dot{w} = -3w \quad \Rightarrow \quad w(t) = e^{-3t};$$

$$\frac{d}{dt}(yw) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(t)w(t) = t + C$$

$$\boxed{y(t) = Ce^{3t} + te^{3t}},$$

obecné řešení homogenní rovnice

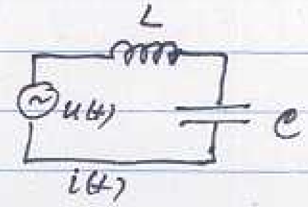
partikulární řešení nehomogenní rovnice

<u>Poznatek</u>. Pokud daná rovnice má <u>konstantní koeficient a</u>, pak výpočty jsou jednoduché a rychlé.

8.5. LODR 2. řádu

8.5.1. Rovnice LC - obvodu

Z Kirchhoffova zákona (odd. 8.1.2):



$$L\frac{di(t)}{dt} + u_C(t) = u(t)\;, \qquad \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}$$

Dostaneme (derivováním & dosazením) důsledek:

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{du_C(t)}{dt} = \underbrace{\frac{du(t)}{dt}}_{\downarrow}$$

tj. $$\boxed{L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}\, i(t) = v(t)}$$

L, C, v – parametry obvodu.

8.5.2. Speciální lineární diferenciální rovnice 2. řádu

$$\ddot{y} = f(t)\;, \quad t \in I$$

Použijeme (dvakrát) metodu přímé integrace:

$$\int_{t_0}^{t} \ddot{y}(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

$$\dot{y}(t) - \dot{y}(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} \dot{y}(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \dot{y}(t_0)\,ds + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s} f(\tau)\,d\tau\right)ds$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = y(t_0) + \dot{y}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s} f(\tau)\,d\tau\right)ds}$$

resp. $$\boxed{y(t) = C_2 + C_1 t + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s} f(\tau)\,d\tau\right)ds}$$

Př: Stanovme řešení rovnice [zjednodušený zápis]
– postupné integrování:

$$\ddot{y} = t^2+1 \quad , \quad t\in R$$

$$\dot{y}(t) = \frac{t^3}{3}+t+C_1$$

$$\boxed{y(t) = \frac{t^4}{12}+\frac{t^2}{2}+C_1 t+C_2} \quad , \quad C_1, C_2 \text{ - lib. konstanty}$$

Př:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y} &= \sin t , \\ y(0) &= 1 \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{počáteční úloha}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\cos t + C_1 \\ y(t) &= -\sin t + C_1 t + C_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{y}(0) &= 0 = -\cos 0 + C_1 \\ y(0) &= 1 = -\sin 0 + C_1\cdot 0 + C_2 \end{aligned}$$

$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 1$$

Řešení úlohy: $y(t) = -\sin t + t + 1$

Zk: $\dot{y} = -\cos t + 1$
$\ddot{y} = \sin t$

8.5.3. Speciální LODR 2. řádu (jiný typ)

$\ddot{y} = a(t)\,y$ – s proměnným koeficientem

$\ddot{y} = a y$ – s konstantním koeficientem

→ převedeme na soustavu dvou LODR 1. řádu:

označme: $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y} = \dot{y}_1$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= a y_1 \end{aligned}$$

Řešení soustav LODR 1. řádu: viz MEZ (2. semestr)
Nyní „kuchařka“: (Metoda charakteristické rovnice)

Předpokládáme, že řešení bude exponenciální funkce tvaru

$$u(t) = e^{\alpha t};$$

a hledáme parametr α:
po dosazení

$$\alpha^2 e^{\alpha t} = a e^{\alpha t}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^2 - a = 0 \qquad \text{charakteristická rovnice}$$

$$\underline{\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{a}}$$, a může být i záporné!
$\hookrightarrow$ konstanta!!

Dvojice řešení: $\underline{e^{\alpha_1 t}, \; e^{\alpha_2 t}}$

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}}$$

Př:

X. Příklady z ODR

1. Když $y = y(t)$, $t \geq t_0$ označuje ~~po~~ množství (hustotu) populace nakažené chřipkovým virem, pak příslušná zákonitost šíření chřipkové epidemie má tvar

$$\frac{dy}{dt} = -a y \ln\frac{y}{b}, \qquad a, b \text{ jsou konstanty}$$

<u>Metoda:</u> substituce $u = \ln\frac{y}{b}$ převádí na lineární rovnici

tj.: $y = b e^u$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = b e^u \frac{du}{dt} \quad ; \text{ dosazení do rovnice}$$

$$b e^u \frac{du}{dt} = -a(b e^u) \ln e^u$$

$$\frac{du}{dt} = -a u \quad \Rightarrow \quad u(t) = C e^{-at}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = b e^{C e^{-at}}} \quad \text{obecné řešení}$$

2. Rovnice loxodromy:

$$dV = b \frac{dU}{\cos U} \quad ;$$

$V = V(U)$ ... vztah souřadnic

V, U bodu na sféře

Metoda přímé integrace:

$$V = b \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{U}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \underbrace{C}_{\ln C} \quad ; \quad U \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

$$V = \ln C \left|\operatorname{tg}\left(\frac{U}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|^b$$

3. Délka loxodromy: $dl = k \cdot du \Rightarrow l = ku + C$

4. ODR pro konformní kuželové zobrazení: $-\frac{d\rho}{\rho} = \frac{n\, dU}{\cos U}$, n-konst.

metoda: separace proměnných

$$-\ln\rho = n\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{U}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln C$$

$$\boxed{\rightarrow \rho = C\left|\operatorname{tg}\left(\frac{U}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|^{n}}$$

5. Rovnice typu $\frac{dU}{\cos U} := \alpha \cancel{b\,\frac{dB}{B\cos B}}$, α, β konst.

$$\alpha\,\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2 B}\cdot\frac{dB}{\cos B}$$

rovnice Gaussova konformního zobrazení elipsoidu na kouli

Rovnice Gaussova konformního zobrazení elipsoidu na kouli:

$$\frac{dU}{\cos U} = \alpha \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2 B}\,\frac{dB}{\cos B}$$

Připravení pro metodu separace proměnných: $\left.\begin{array}{l} x = B \\ y = U \end{array}\right\}$.
$b = e^2$ konst.

$$\frac{dy}{\cos y} = \alpha \frac{1-b}{1-b\sin^2 x}\,\frac{dx}{\cos x}$$

LS:

$$\int \frac{dy}{\cos y} = \int \frac{\cos y}{\cos^2 y}\,dy = \int \frac{\cos y\,dy}{1-\sin^2 y} = \left|\begin{array}{l} z = \sin y \\ dz = \cos y\,dy \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{dz}{1-z^2} = -\int \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = -\int \left[\frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1}\right] dz = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}\right] dz =$$

$$= \ln|z+1|^{\frac{1}{2}} - \ln|z-1|^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}} = \underline{\ln\frac{\sqrt{\sin y+1}}{\sqrt{\sin y-1}} + C_1}$$

PS:

$$\int \frac{1-b}{1-b\sin^2 x}\,\frac{dx}{\cos x}\,\frac{\cos x}{\cos x} = \int \frac{1-b}{1-b\sin^2 x}\,\frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \left|\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right| = \int \frac{1-b}{1-bt^2}\,\frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \int \frac{1-b}{(1-\sqrt{b}t)(1+\sqrt{b}t)(1-t)(1+t)}\,dt = \int \left[\frac{A_1}{1-\sqrt{b}t} + \frac{A_2}{1+\sqrt{b}t} + \frac{A_3}{1-t} + \frac{A_3}{1+t}\right] dt =$$

→ vypočtou se konstanty A_1, A_2, A_3, A_4.

$$= A_1 \ln|1-e\underset{\sin x}{\underset{\uparrow}{t}}| + A_2 \ln|1+e\underset{\sin x}{\underset{\uparrow}{t}}| + A_3 \ln|1-\underset{\sin x}{\underset{\uparrow}{t}}| + A_4 \ln|1+\underset{\sin x}{\underset{\uparrow}{t}}| + C_2$$

Závislost mezi x a y je dána rovnicí

$$\ln\sqrt{\frac{\sin y+1}{\sin y-1}} = A_1 \ln|1-e\sin x| + A_2 \ln|1+e\sin x| + A_3 \ln|1-\sin x| + A_4 \ln|1+\sin x|$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \underline{V_1(\sin y) = V_2(\sin x)}$$